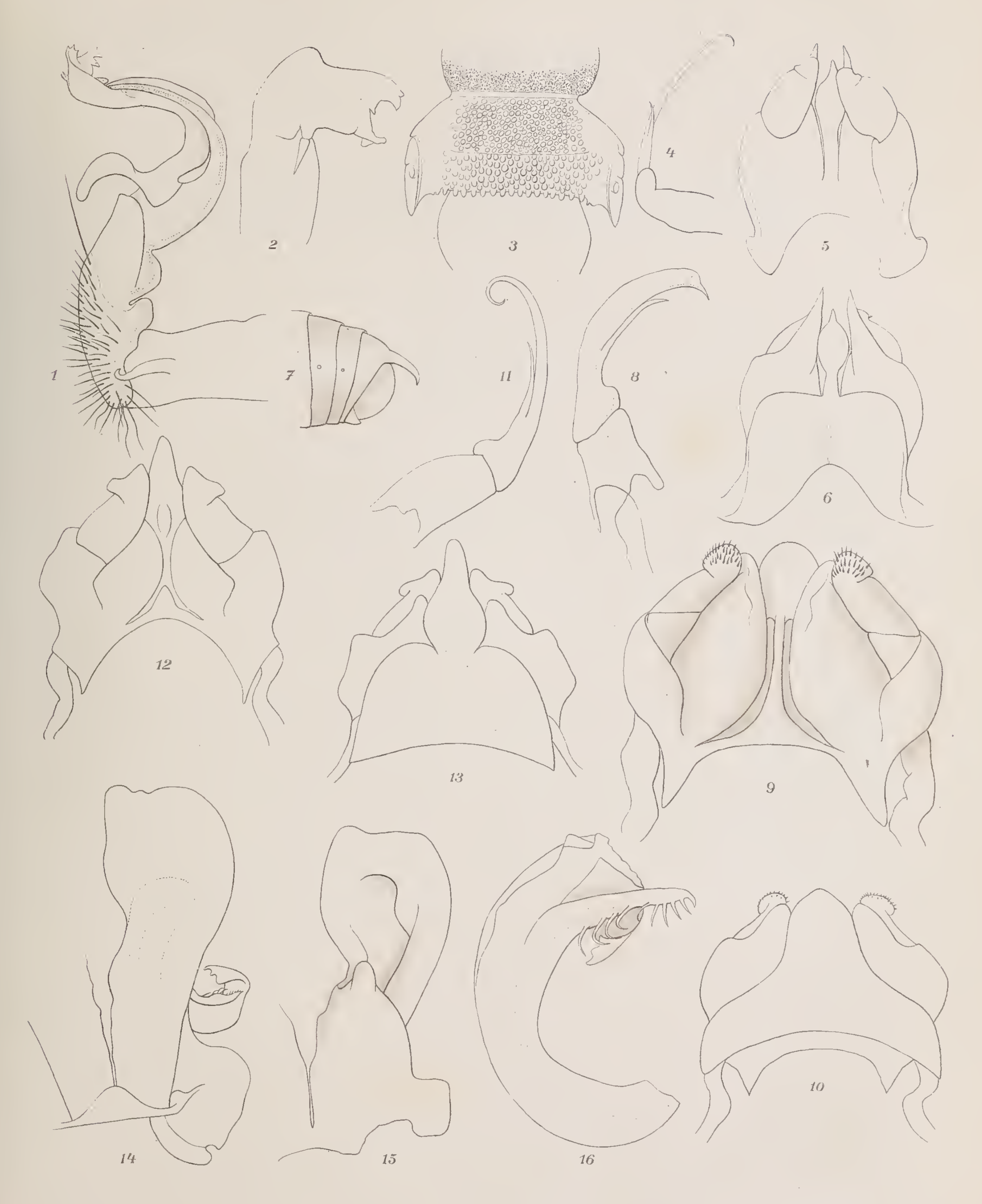


Lith. Kunstanstalt v. Friedr. Sperl, Wien, III 1.



ÜBER DREHUNGSINVARIANTEN

VON

ROLAND WEITZENBÖCK

IN GRAZ.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 24. APRIL 1913.

Einleitung.

I.

Im $(n-1)$-dimensionalen Raume R_{n-1} (Gebiet n-ter Stufe, n-äres Gebiet), $(n \geqq 3)$ bezeichnen wir die homogenen Koordinaten eines Punktes x mit x_i, die einer Geraden mit π_{ik}, die einer Ebene mit $\pi_{ikl}, \ldots$ und die eines linearen, $(n-2)$-dimensionalen Raumes mit u'_i. Es sei dann f eine Form, welche eine oder mehrere dieser Koordinatenreihen zu beliebigem Grade enthält, das heißt eine ganze rationale Funktion der $x_i, \pi_{ik}, \pi_{ikl}, \ldots, u'_i$, die homogen in jeder Koordinatenreihe ist, die sie enthält.

Wenn wir weiterhin von einem (algebraischen) »geometrischen Gebilde« sprechen, so verstehen wir darunter diejenige geometrische Figur im R_{n-1}, die durch Nullsetzen einer endlichen Anzahl m von solchen Formen f (»Grundformen«) dargestellt wird:

$$f^{(1)} = 0, \quad f^{(2)} = 0, \ldots\ldots\ldots, f^{(m)} = 0 \qquad (m \geqq 1).$$

Die Koordinaten, die in diesen Formen auftreten, denken wir uns hierbei als unabhängige Veränderliche.

Es sei nun S eine lineare Substitution oder auch eine Gruppe von solchen Substitutionen. Ferner bezeichne J eine ganze rationale Invariante der Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich S, das heißt eine ganze rationale, allseitig homogene Funktion der Koeffizienten der Grundformen $f^{(i)}$, welche sich nicht auf eine Konstante reduziert und die nach Ausführung einer Substitution S mit einem Faktor multipliziert erscheint, der nur von den Transformationskoeffizienten von S abhängt. Allseitighomogen soll hierbei heißen: homogen in den Koeffizientenreihen jeder einzelnen der Grundformen $f^{(i)}$.

Wir bemerken noch, daß wir auch Kovarianten, Kontravarianten etc. mit dem Worte »Invariante« zusammenfassen. Es kommt dies ja bekanntlich nur auf eine Erweiterung des Systems der Grundformen $f^{(i)}$ durch Hinzufügen von Linearformen hinaus.

Eine »bei S invariante Eigenschaft« von geometrischen Gebilden, die durch die Grundformen $f^{(i)}$ gegeben sind, soll im folgenden definiert sein durch das Bestehen von Gleichungen (Identitäten) zwischen Invarianten J. Als häufigstes Vorkommnis erwähnen wir das Verschwinden von Invarianten und das identische Verschwinden von Kovarianten etc.

Wenn nun geometrische Gebilde Γ im R_{n-1}, definiert durch ein System von Grundformen $f^{(i)}$, und eine bestimmte Kolineationsgruppe S gegeben vorliegen, so bildet die Frage nach den bei den Transformationen von S invarianten Eigenschaften der Gebilde Γ ein fundamentales Problem.

In algebraischer Formulierung kommt diese Frage auf folgendes hinaus: Man soll alle algebraischen Invarianten der Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich der Gruppe S angeben. Und diese Frage findet ihre erste Lösung durch Angabe der ganzen rationalen Invarianten der Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich S. Wir beschränken uns im folgenden auf diese, verstehen also unter Invariante schlechthin stets eine ganze rationale Invariante.

Diese Ideenbildung wurde wohl zuerst von F. Klein ausgesprochen.[1]

Für die Untersuchung der Invarianten von Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich einer Kollineationsgruppe S ist der Begriff »vollständiges Invariantensystem« von grundlegender Wichtigkeit. Ein vollständiges Invariantensystem wird gebildet von ganzen rationalen Invarianten $J_1, J_2, J_3, \ldots$ der Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich S, die die Eigenschaft besitzen, daß sich durch sie jede ganze rationale Invariante der Grundformen $f^{(i)}$ bezüglich S ganz und rational ausdrücken läßt. Besteht insbesondere das System $J_1, J_2, J_3, \ldots$ aus einer endlichen Anzahl von Invarianten, so heißt das System ein endliches.

Wenn S die allgemeine projektive Gruppe des Gebietes n-ter Stufe R_{n-1} ist, so läßt man in dem Begriffe »Invariante bezüglich S« den Zusatz »bezüglich S« weg und spricht von »(allgemeinen) projektiven Invarianten« oder auch von »Invarianten« schlechthin. Die Theorie dieser Invarianten bildet das, was man gewöhnlich mit »Invariantentheorie« bezeichnet. Die Geometrie, welche von dieser Invariantentheorie beherrscht wird, ist die projektive Geometrie.

II.

Die Frage nach einem vollständigen Invariantensystem von projektiven Invarianten eines gegebenen Systems von Grundformen $f^{(i)}$ findet ihre Beantwortung durch drei Sätze, mit deren Hilfe es auch in den nicht gerade einfachsten Fällen gelingt, ein solches vollständiges Invariantensystem wirklich hinzuschreiben. Diese drei Sätze sind: Die beiden Fundamentalsätze der symbolischen Methode und der Hilbert'sche Endlichkeitssatz.

Der erste Fundamentalsatz der symbolischen Methode[2] sagt Bestimmtes über die Struktur der Invarianten aus: Die Grundformen $f^{(i)}$ werden selbst symbolisch dargestellt; aus den hierbei verwendeten Symbol- und Größenreihen werden in bestimmter Weise die Bausteine gebildet, aus denen sich die Invarianten aufbauen lassen. Diese Bausteine lassen sich von vornherein erschöpfend angeben. Hierbei spielt die sogenannte »abgekürzte Bezeichnung«, das heißt die Verwendung von Faktoren erster und zweiter Art (Linearfaktoren und Klammerfaktoren) eine ausgezeichnete Rolle.

Der zweite Fundamentalsatz der symbolischen Methode[3] handelt von den Relationen die zwischen Invarianten bestehen können. Mit seiner Hilfe gelingt es, bei vorgelegten Invarianten, die zwischen ihnen bestehenden Gleichungen erschöpfend anzugeben.

---

[1] F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm Erlangen 1872; wieder abgedruckt in: Mathem. Annalen 43, p. 63—100 (1893).

Vergl. ferner Enzyklopädie, III A B, 4 b, 31 (G. Fano).

[2] Vergl. meine Arbeit: Beweis des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode, diese Berichte, Bd. 72, Jänner 1913, und die dort angegebene Literatur.

[3] Vergl. meine Arbeit: Beweis des zweiten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode, wie bei [2], Februar 1913, und die dort angegebene Literatur.

Der Satz von D. Hilbert schließlich sagt aus, daß ein vollständiges Invariantensystem von projektiven Invarianten endlich ist.[1] Dieser Satz bietet dann von vornherein die Gewißheit, daß die beiden Tätigkeiten: 1. Aufbauen von Invarianten vermittels des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode und 2. Aufstellen der Relationen zwischen den so erhaltenen Invarianten vermittels des zweiten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode, nicht ins Endlose verlaufen können, sondern nach einer endlichen Zahl von Schritten abbrechen müssen. Dann eben ist man im Besitze eines vollständigen Invariantensystems.

Ist nun die eben auseinandergesetzte Methode zur Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems auch dann anwendbar, wenn wir als Kollineationsgruppe S nicht die allgemeine projektive Gruppe, sondern eine algebraische Untergruppe derselben wählen? Wie liegen insbesondere diese Verhältnisse, wenn wir für S die sogenannte »Hauptgruppe«[2] nehmen und also nach elementargeometrischen[2] Eigenschaften von geometrischen Gebilden fragen, oder noch spezieller, wenn wir für S die Gruppe H der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen nehmen? Auf diese letzteren Fragen werden wir in dieser Arbeit eine teilweise Antwort geben.

Die Transformationen der Gruppe der Bewegungen und Umlegungen lassen das absolute Gebilde Ω (im R_3 den »Kugelkreis«) invariant. Man kann nun versuchen, das oben formulierte Fundamentalproblem »Bestimmung eines vollständigen Invariantensystems von gegebenen Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$« bezüglich der Gruppe H auf die folgende Art zu lösen: Metrische Eigenschaften ergeben sich durch projektive Beziehungen zu dem absoluten Gebilde. Daher braucht man nur den Grundformen $f^{(i)}$ diejenige, in R_{n-2}-Koordinaten quadratische Form U hinzuzufügen (adjungieren), welche, gleich Null gesetzt, das absolute Gebilde Ω darstellt; von diesem erweiterten System

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\ldots, f^{(m)}, U$$

bestimme man dann ein vollständiges Invariantensystem bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe.[3]

Der so angedeutete Weg führt aber nicht zum Ziele, worauf insbesondere E. Study hingewiesen hat.[4] Vor allem sind die Methoden der projektiven Invariantentheorie nicht unmittelbar auf die Form U anwendbar, da deren Koeffizienten nicht unabhängig veränderlich sind, weil die Diskriminante von U verschwindet. Ferner lassen auch die Transformationen der Hauptgruppe (Bewegungen, Umlegungen und Ähnlichkeitstransformationen) das absolute Gebilde Ω invariant; es würde sich also zwischen Bewegungsinvarianten und Invarianten der Hauptgruppe kein Unterschied ergeben.[6]

III.

Wir schlagen im folgenden einen anderen Weg ein.[5] Wenn es nämlich gelingt, das Fundamentalproblem »Aufstellung eines vollständigen Invariantensystems« für eine Untergruppe D von H zu lösen, so ist damit für die Bewegungs- und Umlegungsinvarianten selbst schon viel erreicht. Denn die ganzen rationalen Invarianten bezüglich H sind ja auch Invarianten bezüglich G.

Wir wählen für D die gemischte Gruppe, deren Transformationen von den Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt und von den Spiegelungen an ihm, an den Koordinatenachsen, an den Koordinatenebenen etc. gebildet werden.

---

[1] Vergl. D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen, Mathem. Annalen 36, p. 473—534 (1890).

[2] Vergl. Anmerkung [1] auf p. 2.

[3] Man vergl. diesbezüglich: Enzyklopädie III A B, 4 b, 31 (G. Fano).

[4] E. Study, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, I, Leipziger Berichte 48 (1896), p. 649—664; ferner Geometrie der Dynamen, p. 123, Leipzig 1903.

[5] Andeutungen hierüber finden sich bei E. Study: Über die Invarianten der projektiven Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit von nicht verschwindender Diskriminante, Leipziger Berichte 49 (1897), p. 442—461. Vergl. insbesondere p. 460. Siehe ferner: E. Study, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, Transactions of the american mat. soc. 1, p. 1—49 (1909).

[6] Daß dies in gewissem Sinne wirklich zutrifft, werde ich demnächst in einer Arbeit »Über Bewegungsinvarianten« zeigen.

Die Invarianten eines Systems von Grundformen f bezüglich dieser Gruppe D nennen wir kurz: Drehungsinvarianten.

In dieser Arbeit werden dann die folgenden Aufgaben gelöst:

1. Aufstellung der Bausteine, aus denen sich jede ganze rationale Drehungsinvariante aufbaut, also Ermittlung der Struktur dieser Drehungsinvarianten. Dies geschieht durch Angabe der Art und Weise, wie die symbolisch dargestellten Koeffizienten der Grundformen $f^{(i)}$ in den Drehungsinvarianten auftreten. Dieses Problem wird gelöst durch den (von uns so genannten) ersten Hauptsatz, der genau dem ersten Fundamentalsatz der symbolischen Methode bei den projektiven Invarianten entspricht und dessen Beweis sich auf einen von E. Study[1] bewiesenen Satz stützt.

2. Erschöpfende Angabe der Relationen, die zwischen Drehungsinvarianten bestehen können. Dieses Problem findet seine Erledigung durch den zweiten Hauptsatz, der dem zweiten Fundamentalsatz bei den projektiven Invarianten entspricht.

3. Angabe einer Methode, welche die Auffindung eines vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten gestattet, insbesondere auch die Aufstellung eines kleinsten vollständigen Invariantensystems.

4. Endlichkeitsbeweis für die Invarianten eines vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten. Die Endlichkeit ergibt sich hier aus dem allgemeinen Hilbert'schen Endlichkeitssatz, indem die Drehungsinvarianten eines vollständigen Invariantensystems als projektive Simultaninvarianten erkannt werden.

Wir wollen hier gleich bemerken, daß aus der Endlichkeit der Drehungsinvarianten keineswegs die der Bewegungs- und Umlegungsinvarianten folgt. Es kann wohl jede solche ganze rationale Bewegungs- und Umlegungsinvariante durch eine endliche Anzahl von Drehungsinvarianten ganz und rational dargestellt werden. Um die Endlichkeit der Bewegungs- und Umlegungsinvarianten zu beweisen, müßte man aber zeigen können, daß sich diese endlichvielen Drehungsinvarianten so auswählen lassen, daß sie gleichzeitig den Bewegungs- und Umlegungsinvarianten angehören. Dieser Beweis ist mir bisher nicht gelungen.[2]

Immerhin erhalten wir durch das Folgende eine Methode, alle Ausdrücke anzugeben und in deren Struktur volle Einsicht zu gewinnen, die bei algebraisch-elementargeometrischen Untersuchungen überhaupt auftreten können.[3] Das Wertvollste ist dann durch die Tatsache gegeben, daß man eben die Gesamtheit dieser Bildungen übersieht und die Gesamtheit der zwischen ihnen bestehenden Relationen beherrscht.

Im besonderen sei ausgeführt:

Wir machen durchwegs Gebrauch von der abgekürzten Bezeichnung und von der symbolischen Darstellung der gegebenen Grundformen. Unter letzterer verstehen wir nicht nur die von Aronhold-Clebsch eingeführte Symbolik, die nur mit »gewöhnlichen« Symbolen arbeitet, sondern auch diejenige Symbolik, in der zum Beispiel Plücker'sche Linienkoordinaten p_{ik} durch »Komplexsymbole« p_i dargestellt werden:

$$p_{ik} = p_i p_k = -p_k p_i.$$

Ich habe diese Erweiterung der gewöhnlichen Symbolik zuerst in dem Buche »Komplexsymbolik«[4] angewendet und in verschiedenen späteren Arbeiten auseinandergesetzt.[5]

[1] Vergl. die erste, bei [5] auf p. 3 genannte Arbeit.

[2] Es läßt sich leicht ein Kriterium dafür angeben, daß eine Drehungsinvariante auch Bewegungsinvariante ist, indem man die Gruppe der Schiebungen berücksichtigt.

[3] Beispiele von solchen Ausdrücken bei Anwendung der abgekürzten Bezeichnung und symbolischen Darstellung habe ich gegeben in der Arbeit: Zur Differentialgeometrie algebraischer Flächen, Monatshefte f. Math. u. Phys., 1913. Ferner in einer demnächst erscheinenden Arbeit: Zur Elementargeometrie eines Kegelschnittes, Tôhoku mathematical journal, 1913.

[4] Vergl. Komplexsymbolik, Sammlung Schubert, Bd. 57, Leipzig 1908.

[5] Vergl. insbesondere die Arbeit: Über eine Erweiterung des Determinantenbegriffes, Archiv d. Mathem. u. Phys., 1913.

Größen- oder Symbolreihen, die den Punktkoordinaten x_i kogredient sind, bezeichnen wir stets durch Buchstaben ohne Strich, wie $a, b, \ldots$; solche, die den x_i kontragredient sind, durch gestrichelte Buchstaben wie $a', b', \ldots$. Diese Unterscheidung zwischen ko- und kontragredient fällt zwar bei elementargeometrischen Untersuchungen formell weg; es ist aber doch zweckmäßig, eine solche Unterscheidung beizubehalten, da man dann den Ausdrücken sofort ansehen kann, zu welcher Kollineationsgruppe sie als Invarianten gehören. Beispielsweise kommt bei den projektiven Invarianten in Faktoren erster Art $(a\alpha')$ stets ein ungestricheltes Zeichen (a) mit einem gestrichelten Zeichen (α') zusammen vor. Bei Drehungsinvarianten treten aber auch (aa) und $(\alpha'\alpha')$ als Faktoren erster Art auf.

Alle im folgenden verwendeten Größen, Koordinaten etc. sollen gewöhnliche komplexe Größen sein.

---

§ I.

Wir arbeiten im folgenden in einem Euklidischen Raume R_{n-1} von $n-1$ Dimensionen (Gebiet n ter Stufe). ($n \geqq 3$). Die rechtwinkligen homogenen Koordinaten eines Punktes x seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und

$$x_n = 0$$

sei die Gleichung des uneigentlichen (unendlichfernen) R_{n-2}. Ein eigentlicher Punkt y ($y_n \neq 0$) hat dann die rechtwinkligen inhomogenen Koordinaten

$$\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}.$$

Die homogenen Koordinaten eines linearen R_{n-2} u' bezeichnen wir mit $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$. Es ist dann

$$(u'x) \equiv u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + \ldots\ldots + u'_n x_n = 0$$

die Bedingung dafür, daß der Punkt x im R_{n-2} u' enthalten ist. Ferner ist

$$(ab\ldots pq) = \begin{vmatrix} a_1 \; a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n \\ b_1 \; b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 \; p_2 \ldots\ldots\ldots\ldots p_n \\ q_1 \; q_2 \ldots\ldots\ldots\ldots q_n \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die n-Punkte $a, b, \ldots, p$ und q in einem linearen R_{n-2} gelegen sind.

Es seien jetzt ε_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) n^2 gewöhnliche komplexe Größen. Die linearen Transformationen

$$1) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = \varepsilon_{11} \bar{x}_1 + \varepsilon_{12} \bar{x}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{1,\,n-1} \bar{x}_{n-1} \\ x_2 = \varepsilon_{21} \bar{x}_2 + \varepsilon_{22} \bar{x}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{2,\,n-1} \bar{x}_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \varepsilon_{n-1,\,1} \bar{x}_1 + \varepsilon_{n-1,\,2} \bar{x}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{n-1,\,n-1} \bar{x}_{n-1} \\ x_n = \varepsilon_{nn} \bar{x}_n \end{cases} \qquad (\varepsilon_{nn} \neq 0)$$

der Punktkoordinaten x_i ergeben für die Koeffizienten a'_i einer Linearform

$$(a'x) \equiv a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + a'_n x_n$$

die Transformationen:

$$2) \ldots\ldots \begin{cases} \bar{a}'_1 = \varepsilon_{11} a'_1 + \varepsilon_{21} a'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{n-1,\,1} a'_{n-1} \\ \bar{a}'_2 = \varepsilon_{12} a'_1 + \varepsilon_{22} a'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{n-1,\,2} a'_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}'_{n-1} = \varepsilon_{1,\,n-1} a'_1 + \varepsilon_{2,\,n-1} a'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_{n-1,\,n-1} a'_{n-1} \\ \bar{a}'_n = \varepsilon_{nn} a'_n \end{cases} \qquad (\varepsilon_{nn} \neq 0).$$

Die Transformationen (1) bilden eine Kollineationsgruppe, deren Transformationen den R_{n-2}

$$x_n = 0 \qquad \text{(uneigentlicher } R_{n-2}\text{)}$$

und den Punkt

$$u'_n = 0 \qquad \text{(Koordinatenursprung)}$$

invariant lassen.

Wir legen jetzt den Transformationskoeffizienten ε_{ik} die folgenden Bedingungen auf:

$$3) \ldots\ldots\ \varepsilon_{nn} \neq 0,\ \varepsilon_{in} = \varepsilon_{ni} = 0\ (i \neq n);$$

$$4) \ldots\ldots \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon_{ik}\, \varepsilon_{im} = 0,\ (k \neq m),\ (k, m = 1, 2, \ldots\ldots, n-1) \\ \sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon_{ik}^2 = \lambda,\ (\lambda \neq 0),\ (k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n-1) \end{cases}$$

Dann bestimmen diese Transformationen (1) eine gemischte Kollineationsgruppe H, deren Transformationen erstens den uneigentlichen R_{n-2}

$$5) \ldots\ldots\ L = (l'\, x) = x_n = 0,$$

zweitens den Koordinatenanfangspunkt

$$6) \ldots\ldots\ L' = (l'\, u') = u'_n = 0$$

und drittens den Kegel K

$$7) \ldots\ldots\ K = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}^2 = 0$$

invariant lassen. Hierbei haben wir die Größenreihe $0 : 0 : 0 : \ldots\ldots : 0 : 1$ nach Gleichung 5) mit l' bezeichnet. Dies geschieht, um formal mit der abgekürzten Bezeichnungsweise übereinzustimmen.[1] Es erscheint dann statt x_n der Faktor erster Art (Linearfaktor) $(l'\, x)$.

Wir definieren nun als absolutes Gebilde des R_{n-1} den Schnitt Ω des uneigentlichen R_{n-2}

$$(l'\, x) = x_n = 0$$

mit der irreduziblen, $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung

$$8) \ldots\ldots\ \Phi = (xx) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = 0.$$

Dann ist K der Kegel, dessen Spitze der Koordinatenanfangspunkt

$$(l'\, u') = u'_n = 0$$

ist und dessen Erzeugende Minimalgeraden sind. [$(n-2)$-dimensionale Nullkugel.]

Durch die Transformationen (1) mit den Bedingungen (3) und (4) für die ε_{ik} wird aus K

$$K = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}^2 = \lambda\, (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \ldots\ldots + \bar{x}_{n-1}^2)$$

$$9) \ldots\ldots\ K = \lambda\, \bar{K}.$$

Aus Φ hingegen wird wegen

$$10) \ldots\ldots\ \Phi = K + x_n^2:$$

$$\Phi = \lambda\, \bar{K} + \varepsilon_{nn}^2\, \bar{x}_n^2$$

$$11) \ldots\ldots\ \Phi = \lambda\, \bar{\Phi} + (\varepsilon_{nn}^2 - \lambda)\, \bar{x}_n^2.$$

---

[1] Vergl. E. Study, Geometrie der Dynamen, p. 126.

Setzen wir also

$$12) \ldots\ldots \lambda = \varepsilon_{nn}^2 = 1,$$

so haben wir nach Gleichung 11):

$$13) \ldots\ldots \Phi = \bar{\Phi},$$

das heißt, es geht bei den Gleichungen (1) nicht nur der Minimalkegel K, sondern auch Φ und daher auch Ω in sich über. Außerdem bleibt das Quadrat der Entfernung eines Punktes y vom Ursprung konstant. Die Transformationen (1) werden also gebildet von den Drehungen um den Punkt

$$(l'\, u') = u'_n = 0$$

und von den Spiegelungen an dem Ursprung, an den Koordinatenachsen, Koordinatenebenen, Koordinatenräumen etc. Die von diesen Drehungen und Spiegelungen gebildete gemischte Gruppe bezeichnen wir mit D. D ist eine Untergruppe der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen des R_{n-1}.

§ 2.

Nun sei ein System von Grundformen

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, f^{(m)}$$

vorgelegt und jede derselben sei symbolisch dargestellt durch Faktoren erster Art. Die Koeffizienten dieser Grundformen $f^{(i)}$ setzen wir als unabhängig veränderliche, gewöhnliche komplexe Größen voraus.

Wir bezeichnen mit J eine ganze rationale Invariante dieser Grundformen bezüglich der Gruppe D, das heißt eine ganze, rationale, allseitig homogene, nicht identisch verschwindende Funktion der Koeffizienten der Grundformen $f^{(i)}$, welche sich nach Ausführung einer zu D gehörigen linearen Transformation S mit einem Faktor multipliziert, der nur von den Transformationskoeffizienten ε_{ik} abhängt:

$$14) \ldots\ldots \bar{J} = \varphi(\varepsilon_{ik})\, J \qquad [\varphi(\varepsilon_{ik}) \neq 0, \quad |\varepsilon_{ik}| \neq 0].$$

Wir nennen J kurz: Drehungsinvariante.

Die Bezeichnung »allseitig homogen« soll ausdrücken, daß J homogen ist bezüglich der Koeffizienten jeder einzelnen der Grundformen $f^{(i)}$.

Wir sprechen jetzt den (später zu beweisenden) ersten Hauptsatz aus:

Erster Hauptsatz: Jede ganze rationale Drehungsinvariante J der Grundformen $f^{(i)}$ ist symbolisch darstellbar durch die Faktoren:

$$15) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} (a\, b \ldots\ldots p\, q) \\ (a\, b \ldots\ldots p\, l') \end{array} \right., \; (a\, b), \; (a\, l').$$

Hierbei sind $a, b, \ldots\ldots$ gestrichelte oder ungestrichelte Größen- oder Symbolreihen (gewöhnliche Symbole oder Komplexsymbole), mit denen die Grundformen $f^{(i)}$ dargestellt sind; l' bedeutet die Größenreihe $0:0:\ldots\ldots:0:1$.

Dies ist diejenige Gestalt, die der erste Fundamentalsatz der symbolischen Methode für die Drehungsinvarianten annimmt. Die Drehungen erfolgen hierbei um den Koordinatenanfangspunkt $u'_n = 0$.

§ 3.

Wir können die Grundformen $f^{(i)}$ derart symbolisch schreiben, daß nur ungestrichelte Größen- oder Symbolreihen $a, b, \ldots\ldots$ vorkommen. Wir erläutern diese symbolische Darstellung von Grundformen an drei Beispielen.

1. Sei

$$f^{(1)} = (a'\,x)$$

eine Linearform in Punktkoordinaten x_i. Dann setzen wir:

$$a'_i = a_{i_1 i_2 \ldots . i_{n-1}} \qquad = a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots \ldots a_{i_{n-1}}$$
$$x_i = x'_{i_1 i_2 \ldots . i_{n-1}} \qquad = x'_{i_1}\, x'_{i_2} \ldots \ldots x'_{i_{n-1}}.$$

Die Indexgruppen i und $i_1\, i_2 \ldots . i_{n-1}$ sind hierbei algebraisch-komplementär; a_i und x'_k sind $(n-1)$-fältige Komplexsymbole. Wir haben dann

$$f^{(1)} = (a'\,x) = \frac{1}{(n-1)!}\,(a\,x')^{n-1}$$

und es ist hier $f^{(1)}$ durch ungestrichelte Symbole a symbolisch dargestellt.

2. Sei

$$f^{(2)} = (a'\,x)^2$$

eine quadratische Form mit Punktkoordinaten x_i. Hier setzen wir vorerst:

$$a'_{ik} = a'_i\, b'_k.$$

Dann ist:

$$f^{(2)} = (a'\,x)\,(b'\,x).$$

Jetzt führen wir wie beim ersten Beispiel ungestrichelte, $(n-1)$-fältige Komplexsymbole a und b ein. Hiedurch entsteht:

$$f^{(2)} = \frac{1}{[(n-1)!]^2}\,(a\,x')^{n-1}\,(b\,y')^{n-1},$$

wobei die Symbolreihen x' und y' äquivalent sind.

3. Sei

$$f^{(3)} = (a'\,x)\,(\alpha'\,\pi)^2\,(m\,u')^2$$

eine Grundform, die linear in Punktkoordinaten x_i, linear in Linienkoordinaten π_{ik} und quadratisch in Raumkoordinaten u'_i ist. Dann haben wir

$$f^{(3)} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{2!}{(n-2)!}\cdot(a\,x')^{n-1}\,(\alpha\pi')^{n-2}\,(m\,u')^2$$

als symbolische Darstellung von $f^{(3)}$, bei der nur ungestrichelte Symbole vorkommen.

Wir erhalten dann eine analoge Form des ersten Hauptsatzes; es treten aber an Stelle der Faktorentypen 15) die folgenden:

$$16) \ldots\ldots \begin{cases} (a\,b \ldots . p\,q) \\ (a\,b \ldots . p\,l') \end{cases},\ (a\,b)\ ,\ (a\,l'),$$

wobei jetzt $a, b, \ldots\ldots$ nur ungestrichelte Größen- oder Symbolreihen sind. Um dies nachzuweisen, brauchen wir nur in den Faktoren 15) für jede gestrichelte Größen- oder Symbolreihe in der in obigen Beispielen angedeuteten Weise, ungestrichelte Symbolreihen einzuführen. Aus den Typen 15) entstehen dann die Typen 16). Gehen wir umgekehrt von 16) aus und kehren zu den ursprünglichen Größen-und Symbolreihen der Grundformen $f^{(i)}$ zurück, so gelangen wir wieder zu den Faktorentypen 15).

Wir bemerken noch, daß in Klammerfaktoren auch gleiche Reihen von gleichen Komplexsymbolen vorkommen können, wie zum Beispiel in

$$(aaab\ldots\ldots pq) = (a^3 b\ldots\ldots pq).$$ [1]

Für die Durchführung des Beweises des ersten Hauptsatzes benötigen wir nun den folgenden Satz:

Der erste Hauptsatz ist für ein beliebiges System von Grundformen richtig, wenn er für Linearformen

$$(au'),\ (bu'),\ldots\ldots,\ (pu'),\ (qu'),\ldots\ldots$$

richtig ist.

Dieser Satz geht auf das Wesen der symbolischen Darstellung überhaupt zurück. Wir beweisen ihn wie folgt.

Wir bezeichnen mit $a_{ikl\ldots}$, $b_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ die Koeffizienten der Grundformen $f^{(i)}$ (genauer: die Koeffizienten dividiert durch die entsprechenden Polynomialkoeffizienten, beziehungsweise Produkte von solchen). Ist dann

$$K = K(a_{ikl\ldots},\ b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$$

eine ganze rationale Drehungsinvariante, so besteht identisch in allen $a_{ikl\ldots}$, $b_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ die Gleichung:

$$\bar{K} = K(\bar{a}_{ikl\ldots},\bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots) \equiv \varphi(\varepsilon_{ik}).K(a_{ikl\ldots},\ b_{ikl\ldots},\ldots\ldots).$$

Enthält K eine Koeffizientenreihe, zum Beispiel $a_{ikl\ldots}$ in höherem als erstem Grade, so führen wir auf beiden Seiten dieser Identität äquivalente Koeffizientenreihen $a^{(1)}_{ikl\ldots}$, $a^{(2)}_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ ein durch den Polarenprozeß:

$$\sum_{ikl\ldots} \frac{\partial}{\partial a_{ikl\ldots}}\, a^{(1)}_{ikl\ldots}.$$

Dies machen wir so oft, bis K in jeder Koeffizientenreihe linear ist. Hierdurch entsteht

$$K_1(\bar{a}_{ikl\ldots},\bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots) \equiv \varphi(\varepsilon_{ik}).K_1(a_{ikl\ldots},\ b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$$

und K_1 ist jetzt Drehungsinvariante eines größeren Systems von Grundformen, von denen aber einige untereinander äquivalent sind.

Jetzt stellen wir in $K_1(a_{ikl\ldots},\ b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$ die Koeffizientenreihen $a_{ikl\ldots}$, $b_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ und ebenso in $K_1(\bar{a}_{ikl\ldots},\ \bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$ die Koeffizientenreihen $\bar{a}_{ikl\ldots}$, $\bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ in der oben geschilderten Weise mittels ungestrichelter Symbolreihen $a, b,\ldots\ldots$ dar. Sind unter diesen Symbolreihen solche mit gewöhnlichen Symbolen $\alpha, \beta,\ldots\ldots$ vorhanden, so fassen wir dieselben jetzt als Größenreihen auf und identifizieren sie mit den Koeffizientenreihen von Linearformen $(\alpha u')$, $(\beta u'),\ldots\ldots$ Kommen aber unter den Symbolreihen $a, b,\ldots\ldots$ auch Reihen von Komplexsymbolen $\pi, \rho,\ldots\ldots$ vor, so eliminieren wir dieselben auf beiden Seiten der zuletzt hingeschriebenen Identität durch Substitutionen der Gestalt

$$\pi_{i_1 i_2\ldots i_d} = (pq\ldots\ldots r)_{i_1 i_2\ldots i_d} = \begin{vmatrix} p_{i_1}\, p_{i_2}\cdot\ldots\ldots p_{i_d} \\ q_{i_1}\, q_{i_2}\cdot\ldots\ldots q_{i_d} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{i_1}\, r_{i_2}\cdot\ldots\ldots r_{i_d} \end{vmatrix};$$

hier sind die π_i d-fältige Komplexsymbole, die eine Koeffizientenreihe $a_{ikl\ldots}$, $b_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ bilden oder bei der symbolischen Darstellung einer solchen verwendet wurden. Die $p, q,\ldots\ldots, r$ sind dann Reihen von Koeffizienten von Linearformen

$$(pu'),\ (qu'),\ldots\ldots,\ (ru').$$

---

[1] Vergl. die bei [5] auf p. 4 genannte Arbeit.

Aus $K_1(a_{ikl\ldots}, b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$ entsteht auf diese Weise eine Funktion $K_2(\alpha, \beta,\ldots\ldots p, q,\ldots\ldots)$, in der jetzt nur mehr die Koeffizienten von Linearformen

$$(\alpha u'), (\beta u'),\ldots\ldots, (pu'), (qu'),\ldots\ldots$$

vorkommen. Man gelangt dann von K_2 zu K_1 zurück, indem man erstens die Koeffizientenreihen $p, q,\ldots$ den obigen Substitutionen

$$\pi_{i_1 i_2\ldots i_d} = (p\, q\ldots\ldots r)_{i_1 i_2\ldots i_d}$$

entsprechend ordnet und dann $p, q,\ldots\ldots r$ durch eine einzige Reihe von Komplexsymbolen π ersetzt zweitens zieht man dann die Symbolreihen $\alpha, \beta,\ldots\ldots, \pi,\ldots\ldots$ zu Koeffizientenreihen $a_{ikl\ldots}, b_{ikl\ldots},\ldots$ zusammen.

Da nun die Reihen $\bar{a}_{ikl\ldots}, \bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots$ der transformierten Koeffizienten genau so aus den transformierten Reihen $\bar{\alpha}, \bar{\beta},\ldots\ldots, \bar{p}, \bar{q},\ldots\ldots$ gebildet werden wie die Koeffizientenreihen $a_{ikl\ldots}, b_{ikl\ldots},\ldots$ aus den Reihen $\alpha, \beta,\ldots\ldots, p, q,\ldots\ldots$, so folgt[1] aus der Identität

$$K_1(\bar{a}_{ikl\ldots}, \bar{b}_{ikl\ldots},\ldots\ldots) \equiv \varphi(\varepsilon_{ik}).K_1(a_{ikl\ldots}, b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$$

die weitere:

$$K_2(\bar{\alpha}, \bar{\beta},\ldots\ldots, \bar{p}, \bar{q},\ldots\ldots) \equiv \varphi(\varepsilon_{ik}).K_2(\alpha, \beta,\ldots\ldots, p, q,\ldots\ldots),$$

das heißt

$$K_2(\bar{\alpha}, \bar{\beta},\ldots\ldots, \bar{p}, \bar{q},\ldots\ldots) = \bar{K}_2$$

ist eine Drehungsinvariante von Linearformen

$$(\alpha u'), (\beta u'),\ldots\ldots, (pu'), (qu'),\ldots\ldots$$

Gilt nun der zweite Hauptsatz für Drehungsinvarianten von Linearformen, so kann man in der durch ihn gelieferten Darstellung von K_2 den Rückgang zu den ursprünglichen Symbolen $a, b\ldots\ldots$ durchführen. Hiebei wird aber der Typus der Faktoren 15) nicht geändert. Der zweite Hauptsatz gilt dann also auch für $K(a_{ikl\ldots}, b_{ikl\ldots},\ldots\ldots)$, w. z. b. w.

§ 4.

Wir beweisen jetzt den ersten Hauptsatz für Linearformen. Es seien $a, b,\ldots\ldots$ deren Koeffizientenreihen und

$$17)\ldots\ldots G = G(a, b,\ldots\ldots)$$

sei eine ganze rationale Drehungsinvariante von mindestens einer dieser Linearformen, so daß wir also die Gleichung haben:

$$18)\ldots\ldots \bar{G} = G(\bar{a}, \bar{b},\ldots\ldots) \equiv \varphi(\varepsilon_{ik}).G(a, b,\ldots\ldots).$$

Jetzt sind zwei und nur zwei Fälle möglich:

1. G enthält keine der Größen $a_n, b_n,\ldots\ldots$;
2. G enthält mindestens eine dieser Größen $a_n, b_n,\ldots\ldots$

Im ersten Falle enthält dann nach 1) auch $\bar{G}$ keine der Größen $a_n, b_n,\ldots\ldots$ Somit ist G eine ganze rationale und homogene Funktion der Koeffizienten der Linearformen

$$(a \mid u') = a_1 u'_1 + a_2 u'_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} u'_{n-1} \text{ etc.},$$

[1] Vergl. die bei [2] auf p. 2 genannte Arbeit.

welche bezüglich der Transformationen

$$19)\ldots\ldots\begin{cases} x_1 = \varepsilon_{11}\ \bar{x}_1+\ldots\ldots\ldots+\varepsilon_{1,n-1}\ \bar{x}_{n-1} & \sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{im}=0 \qquad (k \neq m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; & \sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon_{ik}^2 = \lambda = 1 \\ x_{n-1} = \varepsilon_{n-1,1}\ \bar{x}_1+\ldots\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1,n-1}\ \bar{x}_{n-1} & (k, m = 1, 2, \ldots\ldots, n-1) \end{cases}$$

[vergl. die Gleichungen 4] die Invarianteneigenschaft besitzt.

In dem Gebiete $(n-1)$-ter Stufe, dessen Veränderliche $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ sind, ist also G eine ganze rationale Invariante bezüglich der Gruppe derjenigen linearen Transformationen, welche die irreduzible, quadratische, $(n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$20)\ldots\ldots\Phi_o = x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_{n-1}^2 = 0$$

in sich überführen Für solche Invarianten ist nun von E. Study bewiesen, daß sie sich vermittels der Faktorentypen

$$21\,a)\ldots\ldots(a \mid b) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\, b_{n-1}$$

und

$$21\,b)\ldots\ldots(ab\ldots.p)_n = \begin{vmatrix} a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} \\ b_1\ b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1\ p_2 \ldots\ldots\ldots\ldots p_{n-1} \end{vmatrix}$$

darstellen lassen.[1]

In unserer Darstellungsweise haben wir statt 21):

$$22)\ldots\ldots(ab\ldots..p)_n = (ab\ldots..pl')$$

$$23)\ldots\ldots(a \mid b) = a_1\, b_1 + \ldots\ldots + a_{n-1}\, b_{n-1} = (ab) - (al')\,(bl')$$

und dies sind Faktorentypen, wie sie in 16) vorkommen. Daher ist der erste Hauptsatz für den Fall 1) bewiesen. Wir bemerken noch, daß auch (ab) und (al') für sich genommen Drehungsinvarianten sind. Dies folgt unmittelbar aus 13) auf Grund der Festsetzung 12).

§ 5.

Wir kommen zum Falle 2), bei dem G mindestens eine der Größen $a_n, b_n, \ldots\ldots$ enthält. Dann läßt sich G immer so darstellen:

$$24)\ldots\ldots G = G_o + (G_{11}\, g_{11} + \ldots\ldots + G_{h_1 1}\, g_{h_1 1}) + \ldots\ldots + (G_{1\nu}\, g_{1\nu} + \ldots. + G_{h_\nu \nu}\, g_{h_\nu \nu}).$$

Hierbei enthält G_o keine der Größen $a_n, b_n, \ldots\ldots$; dasselbe gilt von den mit G_{ik} bezeichneten Ausdrücken. g_{ik} soll eine ganze rationale und homogene Funktion k-ten Grades der Größen $a_n, b_n, \ldots\ldots$ sein

[1] Vergl. die erste bei [5] auf p. 3 genannte Arbeit.

($k = 1, 2, \ldots, \nu$), ($\nu \geqq 1$). Für die Größen h_i gilt $h_i \geqq 0$, aber mindestens ein $h_i \geqq 1$; ferner sollen die Größen

$$g_{1\rho}, g_{2\rho}, \ldots, g_{h_\rho \rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, \nu)$$

linear unabhängig sein, das heißt es soll für konstante c_{ik}

$$c_{1\rho}\, g_{1\rho} + \ldots + c_{h_\rho \rho}\, g_{h_\rho \rho} = 0$$

dann und nur dann bestehen, wenn alle c_{ik} verschwinden. Nach diesen Voraussetzungen sind die Zahlen

$$h_1, h_2, \ldots, h_\nu$$

die kleinsten, die bei einer solchen Darstellung 24) möglich sind. Ebenso sei ν die kleinste ganze Zahl ($\geqq 1$), bei der

$$G_{1\nu}\, g_{1\nu} + \ldots + G_{h_\nu \nu}\, g_{h_\nu \nu} \not\equiv 0$$

ist.

Jetzt bilden wir nach 24) $\overline{G}$:

$$\overline{G} = \overline{G}_o + (\overline{G}_{11}\, \overline{g}_{11} + \ldots) + \ldots + (\overline{G}_{1\nu}\, \overline{g}_{1\nu} + \ldots).$$

Da nach 1)

$$25) \ldots \ldots \overline{g}_{ik} = \varepsilon_{nn}^k\, g_{ik} \qquad (\varepsilon_{nn} = \pm 1)$$

ist, so folgt:

$$\overline{G} = \overline{G}_0 + (\overline{G}_{11}\, g_{11}\, \varepsilon_{nn} + \ldots) + \ldots + (\overline{G}_{1\nu}\, g_{1\nu}\, \varepsilon_{nn}^\nu + \ldots).$$

Die Gleichung 18) gibt dann, wenn wir nach den g_{ik} ordnen:

$$26) \ldots (\overline{G}_0 - \varphi G_0) + [g_{11}(\varepsilon_{nn}\overline{G}_{11} - \varphi G_{11}) + \ldots] + \ldots + [g_{1\nu}(\varepsilon_{nn}^\nu\, \overline{G}_{1\nu} - \varphi G_{1\nu}) + \ldots] \equiv 0$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze rationale Funktion der voneinander unabhängigen Größen $a_n, b_n, \ldots$; sie verschwindet identisch, daher ist wegen der über die g_{ik} gemachten Voraussetzungen jeder Koeffizient gleich Null. [1]) Also wird:

$$27) \ldots \overline{G}_0 = \varphi(\varepsilon_{ik})\, G_0 \qquad \overline{G}_{ik} = \frac{\varphi(\varepsilon_{ik})}{\varepsilon_{nn}^k}\, G_{ik} \qquad (\varepsilon_{nn} = \pm 1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, h_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

d. h. G_0 und die Ausdrücke G_{ik} sind Konstante oder Drehungsinvarianten. Da in diesen aber die Größen a_n, $b_n, \ldots$ gar nicht vorkommen, so sind die nichtkonstanten G_{ik} nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Faktorentypen 22) und 23) darstellbar.

Nun ist weiter:

$$28) \ldots a_n = (a l'),\ b_n = (b l'), \ldots$$

und G ist also durch die Faktorentypen

$$29) \ldots (a b \ldots p l'),\ (a b),\ (a l')$$

darstellbar.

---

[1] Vergl. etwa: M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, Leipzig 1910, p. 6, Satz 1.

Dann bemerken wir, daß die n-reihige Determinante

$$30) \ldots\ldots (ab \ldots\ldots pq) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & p_n \\ q_1 & q_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & q_n \end{vmatrix}$$

eine projektive Invariante, also auch eine Drehungsinvariante ist.

Wenn wir sie nach der letzten Spalte entwickeln, so erhalten wir eine Darstellung von $(ab \ldots . pq)$ mittels der Faktoren (29):

$$31) \ldots\ldots (ab \ldots . pq) = (ab \ldots pl')(ql') - (ab \ldots ql')(pl') + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die Identität

$$(ab \ldots pq)(l'l') = (ab \ldots pl')(ql') - (ab \ldots ql')(pl') + \ldots\ldots$$

in der wir

$$(l'l') = 1$$

gesetzt haben. (Vergl. die Gleichungen 5) und 6).

Wir vereinbaren nun, daß wir in G, welches mittels der Faktoren 29) dargestellt ist, für einen Ausdruck

$$(ab \ldots pl')(ql') - (ab \ldots ql')(pl') + \ldots\ldots$$

den ihm gleichen Faktor $(ab \ldots pq)$ schreiben. Hierdurch tritt zu den Faktoren 29) noch der Typus $(ab \ldots pq)$, wodurch wir also die Faktoren 16) erhalten.

Der erste Hauptsatz ist somit für Linearformen und daher überhaupt für beliebige Grundformen bewiesen.

Die zuletzt gemachte Bemerkung zeigt des weiteren, daß wir im ersten Hauptsatz den Faktortypus $(ab \ldots pq)$ weglassen können. [Vergl. 31).] Es ist aber unter Umständen zweckmäßig, ihn beizubehalten, worauf wir in der obigen Formulierung des ersten Hauptsatzes Rücksicht genommen haben.

§ 6.

Nach dem ersten Hauptsatz ist jede ganze rationale Drehungsinvariante K durch die Faktoren 15) ganz und rational ausdrückbar. K ist ein Produkt von solchen Faktoren oder eine Summe von solchen Produkten. Dabei ist jedes dieser Produkte allseitig homogen und selbst wieder eine Drehungsinvariante, denn die Faktoren 15) besitzen gegenüber der Gruppe D die Invarianteneigenschaft. [Vergl. den auf die Gleichung 23) bezüglichen Schluß des § 4.] Wir erhalten somit sicher alle Invarianten eines vollständigen Invariantensystems bezüglich der Gruppe D, wenn wir nur Produkte der Faktoren 15) betrachten. Hierbei wird »ein vollständiges Invariantensystem« gebildet von ganzen rationalen Invarianten, die die Eigenschaft haben, daß sich durch sie alle ganzen rationalen Invarianten (bezüglich derselben Gruppe) ganz und rational ausdrücken lassen.

Wir haben also den

Satz 1: Die Invarianten eines vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten können so gewählt werden, daß sie Produkte der folgenden Faktoren sind:

$$32) \ldots\ldots (ab \ldots . pq),\ (ab \ldots\ldots pl'),\ (ab),\ (al')$$

l' bedeutet hierbei die Größenreihe $0:0:\ldots\ldots:0:1$.

Wir bemerken hierzu, daß der Faktortypus $(ab \ldots . pq)$ auch weggelassen werden kann, er ist nach 31) durch die übrigen Faktoren ausdrückbar.

Da jeder einzelne der Faktoren 32) gegenüber der Gruppe D die Invarianteneigenschaft besitzt, ist auch die Umkehrung von Satz 1 richtig, die wir so aussprechen:

Satz 2. Jedes Produkt von Faktoren 32), dem eine nichtsymbolische Deutung bezüglich der Koeffizienten der Grundformen f zukommt, ist eine ganze rationale Drehungsinvariante dieser Grundformen.

§ 7.

Es bezeichne jetzt S das System der ursprünglichen Grundformen:

$$S = f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots \ldots \ldots, f^{(m)} \qquad (m \geqq 1).$$

Dann sei

$$F = (m' x)^2 = \sum m'_{ik} \, x_i \, x_k$$

eine quadratische Form in Punktkoordinaten x_i, von der wir voraussetzen, daß ihre Diskriminante von Null verschieden sei.

Ferner sei

$$L = (l' x)$$

eine Linearform und es möge l' jetzt nicht die Größenreihe $0:0:\ldots\ldots:0:1$ bedeuten; die l' sollen vorläufig unbestimmte Parameter sein.

Wenn wir dem System S der Grundformen $f^{(i)}$ die beiden Formen F und L hinzufügen, so entsteht ein erweitertes System

$$S' = S + F + L = f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots \ldots \ldots, f^{(m)}, F, L$$

von $m + 2$ Grundformen. Nach dem ersten Fundamentalsatz der symbolischen Methode ist jede ganze rationale Invariante des Systems S' bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe G darstellbar durch die folgenden Faktoren:

$$33) \ldots \ldots \ldots (ab \ldots . p\, q), \; (\alpha' \beta' \ldots . \mu' \nu'), \; (a \alpha'),$$

wobei m' und l' unter den gestrichelten Reihen $\alpha', \beta', \ldots\ldots$ vorkommen können.

Wir bezeichnen mit J solche ganze rationale Invarianten von Formen des Systems S' bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe, die durch ein Produkt von Faktoren 33) dargestellt werden. Enthält J die Koeffizienten m'_{ik}, so kommt in J die Symbolreihe m' mindestens zweimal vor. Wir haben dann die drei Ansätze (und nur diese drei):

$$34) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} J_1 = (m' \alpha' \ldots\ldots \mu' \nu')\,(m' \beta' \ldots\ldots \sigma' \tau')\, J'_1. \\ J_2 = (m' \alpha' \ldots\ldots \mu' \nu')\,(m' a)\, J'_2. \\ J_3 = (m' a)\,(m' b)\, J'_3. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet J'_k ein Produkt von weiteren symbolischen Faktoren, und l', sowie weitere, zu m' äquivalente Symbole von F können unter den Reihen $\alpha', \beta', \ldots\ldots$ vorkommen.

Nehmen wir nun F in der speziellen Gestalt

$$\Phi = (x\, x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2$$

an, so wird aus 34):

$$
35) \ldots\ldots \begin{cases} J_1 = \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha' \ldots\ldots \mu' \nu')_i \, (\beta' \ldots\ldots \sigma' \tau')_i \, J_1' = \begin{vmatrix} (\alpha' \beta') \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha' \tau') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\nu' \beta') \ldots\ldots\ldots\ldots (\nu' \tau') \end{vmatrix} J_1' \\ J_2 = (a \alpha' \ldots\ldots \mu' \nu') \, J_2' \\ J_3 = (a b) \, J_3' \end{cases}
$$

Kommen in J mehr als zwei Symbolreihen von F vor, so entstehen beim Übergang von F zu Φ Faktoren vom selben Typus 35). Diese Faktorentypen 35) geben — abgesehen von der Konstanten $(l' \, l')$ — mit 33) zusammen genau die, welche durch 15) dargestellt werden.

§ 8.

Wir nehmen jetzt statt l' die Größenreihe $0:0:\ldots\ldots:0:1$ und bezeichnen das erweiterte System: Grundformen $f^{(i)}$, Φ, L mit S_o:

$$
S_o = S + \Phi + L.
$$

Bilden wir nun ein vollständiges Invariantensystem von S_o bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe G, so setzt sich — bis auf zwei Ausnahmen — jede Invariante desselben aus Faktoren 32) zusammen. Diese zwei Ausnahmen werden gebildet durch die Diskriminante von Φ und die Invariante $(l' \, l')$, die beide gleich Eins werden.

Wir haben daher den

Satz 3: Die Invarianten eines vollständigen Invariantensystems der Formen des Systems S bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe können — bis auf die Diskriminante von Φ und die Invariante $(l' \, l')$, die beide gleich Eins sind — so gewählt werden, daß sie Produkte von Faktoren 32) sind.

Umgekehrt haben wir den folgenden Satz, wie aus der Invarianteneigenschaft der Faktoren 34) sofort gefolgert werden kann:

Satz 4. Jedes Produkt von Faktoren 32), dem bezüglich der Koeffizienten der Grundformen $f^{(i)}$ eine nicht symbolische Deutung zukommt, ist eine ganze rationale Invariante der Formen des erweiterten Systems S_o bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe.

Im Vereine mit Satz 1 ergibt sich hieraus:

Satz 5: Die Invarianten eines vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten der Grundformen $f^{(i)}$ können so gewählt werden, daß sie ganze rationale Invarianten der Formen des erweiterten Systems S_o bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe sind. Um daher ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten der Grundformen $f^{(i)}$ zu finden, braucht man nur ein vollständiges Invariantensystem der Formen des Systems S_o bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe aufzustellen, bei dem jede Invariante ein Produkt von Faktoren 32) ist.

Wir bemerken, daß das so erhaltene vollständige Invariantensystem von Drehungsinvarianten nicht ein kleinstes System zu sein braucht.

Aus Satz 5 folgt schließlich:

Satz 6: Ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten ist endlich, d. h. besteht aus einer endlichen Anzahl von Drehungsinvarianten.

§ 9.

Wie schon oben (vergl. § 2) bemerkt wurde, vertritt der erste Hauptsatz den ersten Fundamentalsatz der symbolischen Methode für die Drehungsinvarianten. Wir wenden uns jetzt demjenigen Satze (zweiten Hauptsatz) zu, der bei den Drehungsinvarianten dem zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode entspricht. Dieser zweite Fundamentalsatz handelt von den Relationen, welche zwischen Invarianten bestehen können. Wir führen ihn vorerst für die Invarianten der allgemeinen projektiven Gruppe an.

Es sei

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, f^{(m)} \qquad (m \geqq 1)$$

ein System gegebener Grundformen;

$$J_1, J_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, J_\rho \qquad (\rho \geqq 1)$$

seien ganze rationale Invarianten dieser Grundformen bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe: dann besagt der erste Fundamentalsatz der symbolischen Methode, daß sich jede Identität

$$G\,(J_1, J_2, \ldots\ldots\ldots, J_\rho) \equiv 0$$

zwischen solchen Invarianten J_k verifizieren, d. h. zur trivialen Identität [1]) $0 \equiv 0$ umgestalten läßt mit alleiniger Hilfe von trivialidentischen Umformungen [1]) und identischen Umformungen, die durch die fünf folgenden Identitäten (»Nullidentitäten«) gegeben sind: [1])

$$36) \ldots\ldots \begin{cases} I \ldots\ldots (ab \ldots pq)\,(r\alpha') - (rb \ldots pq)\,(a\alpha') + \ldots\ldots\ldots\ldots \equiv 0 \\ I' \ldots\ldots (\alpha'\beta' \ldots \mu'\nu')\,(\sigma' a) - (\sigma'\beta' \ldots \mu'\nu')\,(\alpha' a) + \ldots\ldots\ldots\ldots \equiv 0 \\ II \ldots\ldots (ab \ldots pq)\,(\alpha\beta \ldots \mu\nu) - (\alpha b \ldots pq)\,(a\beta \ldots \mu\nu) + \ldots\ldots\ldots \equiv 0 \\ II' \ldots\ldots (a'b' \ldots p'q')\,(\alpha'\beta' \ldots \mu'\nu') - (\alpha' b' \ldots p'q')\,(a'\beta' \ldots \mu'\nu') + \ldots \equiv 0 \\ III \ldots\ldots (ab \ldots pq)\,(\alpha'\beta' \ldots \mu'\nu') - \begin{vmatrix} (a\alpha') \ldots\ldots & (a\nu') \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots \\ (q\alpha') \ldots\ldots & (q\nu') \end{vmatrix} \equiv 0. \end{cases}$$

In diesen Nullidentitäten sind $a, b \ldots \alpha', \beta', \ldots$ Symbol- oder Größenreihen, mit denen die Grundformen $f^{(i)}$ dargestellt sind. Die ungestrichelten Reihen $a, b, \ldots$ sind den Punktkoordinaten x_i kogredient, die gestrichelten Reihen $\alpha', \beta', \ldots$ den x_i kontragredient. Wir heben weiter hervor, daß bei projektiven Invarianten in Linearfaktoren oder Faktoren erster Art $(a\alpha')$ immer ein ungestrichelter Buchstabe mit einem gestrichelten zusammen vorkommt; in Klammerfaktoren oder Faktoren zweiter Art $(ab \ldots pq)$ und $(\alpha'\beta' \ldots \mu'\nu')$ sind entweder alle Buchstaben gestrichelt oder alle ungestrichelt.

§ 10.

Wir sprechen jetzt den zweiten Hauptsatz aus und skizzieren kurz den Beweis, der analog dem des zweiten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode geführt wird.

---

[1] Vergl. die bei [3] auf p. 2 genannte Arbeit und die dort angegebene Literatur.

Zweiter Hauptsatz: Jede Identität zwischen ganzen rationalen Drehungsinvarianten läßt sich verifizieren mit alleiniger Hilfe von trivial-identischen Umformungen und identischen Umformungen, die durch die drei folgenden Identitäten gegeben sind:

$$37)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} I\ldots\ldots(ab\ldots pq)(\alpha\beta)-(\alpha b\ldots pq)(a\beta)+\ldots\ldots\ldots\ldots\equiv 0 \\ II\ldots\ldots(ab\ldots pq)(\alpha\beta\ldots\mu\nu)-(\alpha b\ldots pq)(a\beta\ldots\mu\nu)+\ldots\ldots\ldots\equiv 0 \\ III\ldots\ldots(ab\ldots pq)(\alpha\beta\ldots\mu\nu)-\left|\begin{array}{ccc}(a\alpha) & \ldots\ldots & (a\nu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (q\alpha) & \ldots\ldots & (q\nu)\end{array}\right|\equiv 0\end{array}\right.$$

Die $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ sind hierbei gestrichelte oder ungestrichelte Größen- oder Symbolreihen, oder auch die Größenreihe $0:0:\ldots:0:1$.

Man sieht, daß der zweite Hauptsatz analog dem zweiten Fundamentalsatze der symbolischen Methode lautet. Da bei Drehungsinvarianten der Unterschied zwischen ko- und kontragredient wegfällt, so erscheinen hier die Identitäten 36 *I*) und 36 *I'*) und ebenso 36 *II*) und 36 *II'*) in je eine einzige Identität 37 *I*) bezw. 37 *II*) zusammengezogen.

Einen besonderen Fall der Identität 37 *I*) haben wir dann, wenn $\alpha = \beta = l'$ ist. Dann erhalten wir wegen $(l'\,l') = 1$:

$$38)\ldots\ldots(ab\ldots pq)-(l'\,b\ldots pq)(a\,l')+(l'\,a\ldots pq)(b\,l')-\ldots\ldots\equiv 0$$

[vergl. § 5, Gleichung 31)].

Die Identitäten 37) können die verschiedenartigsten Gestalten annehmen. Die drei obigen repräsentieren dann drei Klassen von Identitäten; in jeder Klasse gehen die einzelnen Individuen aus den obigen drei Typen *I*, *II* und *III* durch Spezialisierung der Reihen $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ und durch trivial-identische Umformung hervor.[1]

Man könnte dieses Äquivalenzprinzip auch ausdehnen und dann die Identität 37 *I*) ganz unterdrücken. Wenn wir nämlich in 37 *II*) die Reihen $\beta, \ldots, \mu, \nu$ mit $(n-1)$-fältigen Komplexsymbolen s' identifizieren und dann zu ungestrichelten Größen s_i übergehen:

$$(\alpha\, s'^{n-1}) = (-1)^{n-1}\quad (n-1)!\,(\alpha\, s)$$

so entsteht aus 37 *II*) die Identität 37 *I*). Diese Bemerkung gilt auch bezüglich der ersten vier Identitäten 36).

Die so geschilderte Herleitung von 37 *I*) aus 37 *II*) erfordert aber $(n-1)$-fältige Komplexsymbole, die unter den Symbolen, mit denen Grundformen dargestellt werden, nie vorkommen. Man schreibt eben eine Linearform $(a\,u')$ mit R_{n-2}-Koordinaten u'_i nicht als $(n-1)$-te Potenz: $(a'\,u)^{n-1}$. Es kommt der Übergang von 37 *II*) zu 37 *I*) auf eine Substitution

$$(\beta\ldots\ldots\mu\,\nu)_i = s'_i$$

hinaus, und dies ist keine trivial-identische Umformung. Daher behalten wir auch 37 *I*) als selbständigen Typus bei.

Der Beweis[1] des zweiten Hauptsatzes wird folgendermaßen geführt. Man zeigt zuerst, daß der zweite Hauptsatz allgemein, d. h. für beliebige Grundformen richtig ist, wenn er für Linearformen gilt. Hierzu stellt man aus der ursprünglichen Identität $J \equiv 0$ durch identische und trivial-identische Umformungen eine neue Identität $J_o \equiv 0$ her. J_o hat die Eigenschaft, Komplexsymbole auf besondere Weise

---

[1] Vergl. die bei [3] auf p. 2 genannte Arbeit und die dort angegebene Literatur.

zu enthalten: kommt nämlich in einem Gliede von J_o ein Komplexsymbol p ungestrichelt (gestrichelt) vor, so enthalten alle Glieder von J_o dieses Komplexsymbol p ungestrichelt (gestrichelt). Aus $J_o \equiv 0$ bilden wir weiter durch trivial-identische Umformungen (Vertauschung äquivalenter Symbolreihen und Addition der so entstehenden Ausdrücke) eine neue Identität $M \equiv 0$. In $M \equiv 0$ lassen sich dann die Reihen der gewöhnlichen Symbole als wirkliche Größenreihen, also als Koeffizientenreihen von Linearformen auffassen. Diejenigen Koeffizientenreihen p in M, die durch Komplexsymbole p dargestellt werden, ersetzen wir dann durch entsprechend viele Größenreihen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\ldots$ mit Hilfe von Substitutionen der Gestalt

$$p_{ikl\ldots\ldots} = \frac{1}{d!}\,(x^{(1)}\; x^{(2)} \ldots\ldots x^{(d)})_{ikl\ldots\ldots},$$

wobei d die Fältigkeit von p ist.

Durch solche Substitutionen entsteht aus $M \equiv 0$ eine neue Identität $M' \equiv 0$, die keine Komplexsymbole mehr enthält und die eine Identität zwischen Invarianten von Linearformen darstellt. Der Rückgang von $M' \equiv 0$ zur ursprünglichen Identität $J \equiv 0$ ist eindeutig; gilt der zweite Hauptsatz für $M' \equiv 0$, so gilt er auch für $J \equiv 0$.

§ II.

Wir bezeichnen die von l' verschiedenen Größenreihen in $M' \equiv 0$ mit

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, x^{(N)} \qquad (N \geqq 1).$$

Sie kommen in M' in den Faktoren vor:

$$(x^{(1)}\; x^{(2)} \ldots\ldots\ldots x^{(n)}),\; (x^{(1)}\; x^{(2)} \ldots\ldots x^{(n-1)}\; l'),\; (x^{(i)}\; x^{(k)}),\; (x^{(i)}\; l').$$

Es sei nun $N \geqq n$; dann greifen wir n beliebige Reihen $x^{(1)}, \ldots\ldots, x^{(n)}$ in M' heraus und entwickeln M' in eine Gordan-Capelli'sche Reihe[1] nach Potenzen von $(x^{(1)} \ldots x^{(n)})$:

$$M' = M_o + (x^{(1)} \ldots x^{(n)})\, M_1 + \ldots\ldots + (x^{(1)} \ldots x^{(n)})^k\, M_k \qquad (k \geqq 1)$$

Dies ist eine identische Umformung mit Benutzung der Identitäten 37).

Es ist dann

$$M_o \equiv 0,\; M_1 \equiv 0, \ldots\ldots\ldots\ldots M_k \equiv 0$$

und diese Ausdrücke M_i setzen sich aus Polaren $\Delta\, Q$ zusammen, wobei Q einen Ausdruck bezeichnen soll, der aus M' dadurch hervorgeht, daß man zwei Reihen $x^{(i)}$ und $x^{(k)}$ einander gleich setzt.

Jetzt schließt man so wie im allgemeinen Falle,[2] daß der zweite Hauptsatz für M' bewiesen ist, sobald er es für die Ausdrücke Q ist. Mit anderen Worten, der zweite Hauptsatz ist für Invarianten $M' \equiv 0$ richtig, sobald er für Invarianten $Q \equiv 0$ mit nur $N-1$ Koeffizientenreihen bewiesen werden kann. Von $N-1$ kommt man dann auf $N-2$, $N-3, \ldots\ldots\ldots$, bis schließlich bei $n-1$ Koeffizientenreihen $x^{(i)}$ die Möglichkeit aufhört, Q in eine Gordan-Capelli'sche Reihe zu entwickeln. Hier wird dann der Beweis fertiggestellt durch den Satz:

Zwischen Drehungsinvarianten mit $n-1$ oder weniger Größenreihen

$$x^{(i)}, x^{(2)}, \ldots\ldots\ldots, x^{(\sigma)} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq n-1)$$

gibt es nur triviale Identitäten.

---

[1] Vergl. etwa: A. Capelli, Lezioni sulla teoria delle forme algebriche, Neapel 1902, p. 134.

[2] Vergl. die bei [3] auf p. 2 genannte Arbeit.

Der Beweis dieses Satzes kann so geführt werden: Wir nehmen zuerst an, $\underset{\sim}{Q}$ enthält nur Linearfaktoren

$$(x^{(i)}\, x^{(k)}),\ (l'\, x^{(i)}) \qquad [i, k = 1, 2, \ldots\ldots, \sigma;\ 1 \leqq \sigma \leqq n-1]$$

Dann können wir die Größen α_{ik} beliebig annehmen und die Gleichungen

$$(x^{(i)}\, x^{(k)}) = \alpha_{ik} \qquad (l'\, x^{(i)}) = \alpha_{oi}$$

nach den $x_\rho^{(i)}$ $(\rho = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ auflösen, was immer möglich ist. Es wird dann aus $\underset{\sim}{Q} \equiv 0$:

$$\underset{\sim}{Q}\,(\alpha_{ik}) \equiv 0\ \{\alpha_{ik}\},$$

d. h. es ist auch

$$\underset{\sim}{Q} \equiv 0,$$

also $\underset{\sim}{Q}$ trivial-identisch Null.

Nehmen wir zweitens an, daß $\underset{\sim}{Q}$ auch Klammerfaktoren enthält. Es kann dies nach dem ersten Hauptsatz nur der einzige Klammerfaktor

$$(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots\ldots x^{(n-1)}\, l')$$

sein. Kommt derselbe in einem Gliede von $\underset{\sim}{Q}$ in höherer als erster Potenz vor, so können wir durch Anwendung der Nullidentität 37 *III*) immer erreichen, daß dieses Glied entweder nur die erste Potenz von $(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(n-1)}\, l')$ oder aber nur Linearfaktoren enthält. Wir haben also auf jeden Fall:

$$39) \ldots\ldots\ldots\ldots \underset{\sim}{Q} \equiv (x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots\ldots x^{(n-1)}\, l')\, A + B \equiv 0,$$

wo A und B nur mehr aus Linearfaktoren $(x^{(i)}\, x^{(k)})$ und $(l'\, x^{(i)})$ bestehen.

Aus 39) schließen wir aber, daß

$$A \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad B \equiv 0$$

ist. Unterwerfen wir nämlich die Reihen $x^{(i)}$ der zur Gruppe D gehörigen linearen Transformation:

$$40) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = -\,\bar{x}_1 \\ x_2 = \qquad \bar{x}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \qquad\quad \bar{x}_n \end{cases}$$

so wechselt $(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(n-1)}\, l')$ das Vorzeichen, während $(x^{(i)}\, x^{(k)})$ und $(l'\, x^{(i)})$ ungeändert bleiben. Es folgt also aus 39):

$$41) \ldots\ldots\ldots\ldots (x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots\ldots x^{(n-1)}\, l')\, A - B \equiv 0.$$

Daher ist:

$$A \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad B \equiv 0,$$

und also nach dem eben bewiesenen, da A und B nur mehr Linearfaktoren enthalten:

$$A \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad B \equiv 0,$$

somit auch $\underset{\sim}{Q} \equiv 0$.

Mit Hilfe der Transformation 40) kann man auch allgemein bei einer Identität $J \equiv 0$ nachweisen, daß man J so identisch umformen kann, daß jedes seiner Glieder entweder einen und nur einen Klammerfaktor enthält oder daß in keinem Gliede von J ein Klammerfaktor vorkommt, in J also nur Linearfaktoren auftreten. Zuerst kann man nämlich mit Hilfe der Nullidentität 38) jeden Klammerfaktor $(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n)})$ aus J entfernen. Dann läßt sich das Produkt von je zwei Klammerfaktoren $(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(n-1)} l')$ mit Hilfe von 37 *III*) durch Linearfaktoren ausdrücken. Daher kann jedes Glied von J so umgestaltet werden, daß es höchstens einen Klammerfaktor enthält. Wäre nun

$$J \equiv A + B \equiv 0$$

wo A nur Glieder mit Klammerfaktoren, B nur Glieder ohne Klammerfaktoren enthält, so würde die Transformation 40) auch zur Identität

$$A - B \equiv 0$$

führen, woraus dann

$$A \equiv 0 \qquad \text{und} \qquad B \equiv 0$$

folgt. J zerfällt also in diese beiden zuletzt angeschriebenen Identitäten.

§ 12.

Aus dem zweiten Hauptsatze folgt jetzt im Vereine mit den bisherigen Sätzen:

Satz 7. Gegeben ein System von Grundformen

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots\ldots, f^{(m)}$$

und es seien $a, b, \ldots\ldots, \alpha', \beta', \ldots\ldots$ die Symbol- oder Größenreihen, mit denen diese Grundformen f dargestellt sind.

Man findet dann ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten, indem man erstens nach Satz 5 ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten

$$\sum = J_1, J_2, \ldots\ldots, J_\rho$$

aufstellt und zweitens jede Invariante J_k desselben wegläßt, die durch identische Umformung vermittels der Nullidentitäten 37) durch die übrigen J_ρ $(\rho \neq k)$ ausgedrückt werden kann.

Die Konstatierung dieser letzteren Tatsache kann stets durch eine endlichmalige Anwendung der Identitäten 37) erfolgen, da J ein Produkt (vgl. Satz 5) von endlichvielen Faktoren 32) ist.

Die allgemeinen projektiven Invarianten eines Systems von Grundformen sind natürlich unter den Drehungsinvarianten vorhanden. Bei einem kleinsten vollständigen Invariantensystem von Drehungsinvarianten kommen aber nur diejenigen projektiven Invarianten vor, die keinen Klammerfaktor $(ab \ldots pq)$ enthalten. [Vgl. Gleichung 38).]

Zum Beispiel haben wir bei $n = 4$, wenn das System der Grundformen aus den vier folgenden Linearformen besteht:

$$(a' x), \quad (b' x), \quad (c' x), \quad (\alpha u')$$

die nachfolgenden Drehungsinvarianten:

$$\sum = (a'\,b'\,c'\,\alpha), \quad \begin{matrix}(b'\,c'\,\alpha\,l') \\ (a'\,c'\,\alpha\,l') \\ (a'\,b'\,\alpha\,l') \\ (a'\,b'\,c'\,l')\end{matrix}, \quad \begin{matrix}(a'\,a') \\ (b'\,b') \\ (c'\,c') \\ (\alpha\,\alpha)\end{matrix}, \quad \begin{matrix}(a'\,l') \\ (b'\,l') \\ (c'\,l') \\ (\alpha\,l')\end{matrix}, \quad \begin{matrix}(a'\,b'), (b'\,c'), (c'\,a') \\ (a'\,\alpha), (b'\,\alpha), (c'\,\alpha)\end{matrix}.$$

Σ ist ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten. Ein kleinstes vollständiges Invariantensystem Σ' von Drehungsinvarianten erhält man aus Σ, indem man $(a'\,b'\,c'\,\alpha)$ wegläßt. Es sind dann in Σ'

$$(a'\,\alpha),\ (b'\,\alpha) \text{ und } (c'\,\alpha)$$

auch Invarianten bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe.

Die Drehungsinvarianten zerfallen in zwei Klassen: solche mit einem Klammerfaktor $(a\,b\,\ldots\,p\,q\,l')$ und solche ohne einen Klammerfaktor. Die ersteren wechseln bei einer Transformation 40) das Vorzeichen, die letzteren nicht. Das Produkt von zwei Drehungsinvarianten der ersten Klasse ist stets ganz und rational durch Drehungsinvarianten der zweiten Klasse ausdrückbar. [1]

§ 13.

Wir setzen jetzt $n \geqq 4$ voraus, so daß also die weiteren Betrachtungen erst vom dreidimensionalen Euklidischen) Raume an gültig sind.

Die Transformationen 1) mit den Nebenbedingungen 3), 4) und 12) stellen die Drehungen (und Spiegelungen) um den Koordinatenanfangspunkt

$$u'_n = 0$$

dar. (Vergl. § 1.) Durch jede Transformation der Gruppe D wird der uneigentliche R_{n-2}

$$(l'\,x) = x_n = 0$$

in sich übergeführt.

Wir betrachten nun jene Transformationen von D, welche auch den R_{n-2}

$$42) \ldots\ldots\ldots\ldots (k'\,x) = 1 \,.\, x_{n-1} = 0$$

in Ruhe lassen. Diese Transformationen bilden wiederum eine (gemischte) Gruppe R, deren Transformationen (Spiegelungen) und Drehungen um die Achse $O\,P$ sind, wobei O der Koordinatenanfangspunkt und P der Punkt mit den Koordinaten

$$0:0:0:\ldots\ldots\ldots\ldots:0:1:0$$

ist; die Gleichung von P ist daher:

$$43) \ldots\ldots\ldots\ldots (k'\,u') = u'_{n-1} = 0.$$

R ist eine Untergruppe von D. Wir suchen die, dem ersten und zweiten Hauptsatz entsprechenden Sätze bezüglich der Gruppe R.

---

[1] Vergl. die beiden bei [5] auf p. 3 genannten Arbeiten von E. Study.